Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de resolución

VICENTE BERMEJO (*)
PURIFICACIÓN RODRÍGUEZ (**)

RESUMEN

En el presente estudio se analizan los distintos factores que pueden incidir en la adquisición de la concepción binaria de la suma, prestando especial interés a los procesos de transición entre estrategias. Tres grupos de niños de 2.° de Preescolar, 1.° y 2.° de EGB resuelven 4 tareas de sumar (1 + N, círculos más guarismo, hechos numéricos y hechos numéricos superiores a la decena) en dos condiciones experimentales (incógnita en el resultado, incógnita en el sumando inicial). Los resultados muestran que los tres factores considerados son significativos tanto con respecto a la conceptualización de la adición, como en cuanto al tipo de estrategias utilizadas y las categorías de errores cometidos. Además, se sugieren algunas rutas evolutivas en las estrategias de resolución y una nueva tipología de errores.

ABSTRACT

In this work different factors that may contribute to the acquisition of the binary conception of addition are analysed. Three groups of children from 2nd of preschool, 1st and 2nd of EGB took part in this research. Four addition tasks (1 + N, circles + numbers, number facts, and number facts greater than ten) were presented within two experimental conditions (the unknown in the result, and the unknown in the first addend). The results show the significant effect of these three factors in determining the children's understanding of addition. These data were based not only on the subjects' level of success over the different tasks, but also on the kind of strategies employed as well as the errors committed by children. In addition, the authors suggest some developmental routes regarding the strategies used, and a new error category.

1. INTRODUCCION

A lo largo de los primeros años escolares el niño adquiere una comprensión cada vez más completa de la operación de sumar. Este desarro-

* Universidad Complutense de Madrid.
** Esc. Univ. del Profesorado de EGB de Segovia. Este trabajo recoge parte de los datos presentados en la Tesis Doctoral del segundo autor, y que ha sido dirigida por el primer autor.

llo se manifiesta, entre otros aspectos, en la presencia de procedimientos progresivamente más complejos y en una mayor flexibilización en la elección de las estrategias que conducen a la resolución de las tareas aditivas. Desde el punto de vista teórico, este avance se debería bien a un cambio de conceptualización de la operación aditiva (Weaver, 1982), bien a una elaboración más compleja del esquema parte-todo (Resnick, 1983). Dado que ya nos hemos ocupado de la posición de Resnick en otros trabajos (Bermejo, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1986; 1987; 1990a; Bermejo y Lago, 1987), nos centraremos ahora en torno a la propuesta de Weaver. Este autor distingue dos modos diferentes de concebir la adición: concepción unitaria y binaria. En el primer caso, la suma se entiende como un cambio de estado, de modo que se modifica un conjunto inicial haciéndose mayor. Por ejemplo, a una cierta edad los niños interpretan la ecuación 7 + 4 como un conjunto formado por 7 elementos al que se le añaden 4 elementos más. En cambio, el problema 4 + 7 se concibe como un conjunto inicial de 4 elementos al que se le van a añadir 7 más. El resultado de ambas operaciones no tiene que ser necesariamente el mismo. Por otra parte, desde la concepción binaria la adición se entiende como la combinación de dos conjuntos o cardinales, que además posee la propiedad conmutativa. Así, siguiendo con el ejemplo anterior, 7 + 4 y 4 + 7 representan dos formas equivalentes de expresar la relación aditiva entre los cardinales 7 y 4.

Algunos autores (Baroody y Gannon, 1984; Baroody y Ginsburg, 1983, 1986; Weaver, 1982) señalan que la concepción unitaria de la suma sería característica de las etapas iniciales del desarrollo aditivo, mientras que la concepción binaria aparecería más tarde en este desarrollo. No obstante, los escasos datos disponibles hasta el momento ofrecen un soporte empírico confuso a esta afirmación. Los autores (Baroody y Ginsburg, 1986; Carpenter, 1986) se han centrado principalmente en torno a dos áreas para apoyar esta idea: 1) los problemas verbales y 2) las estrategias de resolución. En cuanto a los primeros, la estructura unitaria sería propia de algunos problemas aditivos, mientras que la binaria lo sería de otros. Así, por ejemplo, en los problemas verbales de cambio subyace una concepción unitaria de la adición (Fuson, 1988). Estos problemas se caracterizan por la presencia de una acción implícita o explícita que modifica una cantidad inicial, dando como resultado el incremento de esa cantidad; es decir, hay un único poseedor y una cantidad inicial que se ve incrementada. Por ejemplo:

> Luis tiene 5 canicas y Mario le regala 3 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Luis ahora?

Por el contrario, los problemas verbales de combinación reflejan una concepción binaria, ya que se presentan dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo, sin que exista ningún tipo de acción. Por tanto, hay dos conjuntos y dos poseedores diferentes. Por ejemplo:

> Luis tiene 5 canicas y Mario tiene 3. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?

Desde la óptica de Weaver cabe esperar que los niños alcancen cotas de éxito más altas en los problemas de cambio que en los de combinación. No obstante, los datos empíricos no parecen respaldar completamente esta afirmación, ya que si bien algunas investigaciones se orientan en esta dirección (Carpenter y Moser, 1983, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987), otras parecen ofrecer datos contrarios, ya que no encuentran diferencias entre unos y otros tipos de problemas (Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Lindvall e Ibarra, 1980; etc.). Briars y Larkin (1984) apuntan que estos últimos datos podrían deberse a dos cosas: por una parte, a la similitud entre los dos tipos de problemas y, por otra, a la posibilidad de que los problemas de combinación conlleven una acción implícita, de manera que los niños podrían solucionarlos con un esquema unitario (ver, Bermejo y Rodríguez, 1990b y Rodríguez en prensa, para más información). Además, ahondando más en esta idea, algunos estudios (p.e. Carpenter, 1986; Hiebert, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983) encuentran que las dificultades aumentan tanto en los problemas de cambio como en los de combinación cuando la incógnita se ubica en uno de los sumandos, de modo que la dificultad resultaría aún mayor cuando el elemento desconocido se sitúa en el primer sumando. Estos datos apoyarían la idea de un esquema unitario inicial, ya que los niños que poseen inicialmente este esquema fracasan en la resolución de las tareas aditivas cuando la incógnita se sitúa en el primer sumando, debido a que no son capaces de traducir el problema en una forma más fácil, como, por ejemplo, intercambiar el lugar de los sumandos, ubicando la incógnita en el segundo término.

Otra de las áreas estudiadas en relación con la concepción unitaria/binaria de la adición es las estrategias de solución. Pero tampoco aquí existen datos definitivos respecto a su vinculación con esta concepción. En principio cabría esperar que las estrategias más sencillas (contar todo con modelos) se asociasen con una concepción unitaria de la suma, mientras que las más complejas (contar a partir del mayor, reglas, memoria) estarían relacionadas con una concepción binaria. Sin embargo, algunos estudios (Carpenter y Moser, 1982; Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983) encentran que los niños que utilizan la estrategia de contar todo con modelos no respetan de modo consistente el orden de los sumandos a la hora de representarlos con objetos o dedos, ni tampoco a la hora de hacer el recuento final. Ello pondría en tela de juicio, como señala Cobb (1985), el carácter unitario de esta estrategia. Lo mismo ocurriría en relación con el descubrimiento posterior por parte de los niños de la estrategia consistente en contar a partir del sumando mayor (Baroody y Gannon, 1984; Groen y Parkman, 1972; Groen y Resnick, 1977; Resnick, 1983; Resnick y Ford, 1981). No está claro si el descubrimiento de esta estrategia supone un avance conceptual relacionado con la concepción binaria de la suma, y propiciado por el descubrimiento de la conmutatividad (Rodríguez, en prensa), o si resulta simplemente de un procedimiento más económico para evitar el laborioso procedimiento de contar todo (Baroody y Gannon, 1984). Por tanto, la concepción unitaria/binaria de la adición así como la transición de la una a la otra siguen siendo temas abiertos a la discusión e investigación.

En cuanto a las estrategias utilizadas por los niños para resolver las tareas aditivas podemos afirmar dos cosas: por una parte, que su estudio constituye un medio valioso para conocer el desarrollo cognitivo del niño y en especial su desarrollo con respecto a la operación aditiva. Y, en segundo lugar, que poseemos actualmente una descripción evolutiva bastante exhaustiva de las diferentes estrategias empleadas habitualmente por los niños. Así, por ejemplo, Carpenter y Moser (1983, 1984) y Carpenter y Fennema (en prensa) ofrecen un panorama bastante completo de los procedimientos que usan los niños para resolver las tareas de adición y de cómo evolucionan a lo largo del tiempo. Las estrategias más básicas *(modelado directo)* implican la utilización de los dedos u objetos físicos para representar los sumandos, recontando todo a continuación. Sin embargo, como pone de manifiesto Baroody (1987), los niños inventan atajos espontáneamente para evitar el laborioso procedimiento de contar todo. Así, por ejemplo, representan ambos conjuntos con objetos o dedos y obtienen la suma total mediante un patrón de reconocimiento; o representan ambos sumandos con los dedos mediante percepción inmediata y cuentan todo para obtener el total, etc. (para más información, ver Bermejo y Rodríguez, 1990b). Posteriormente, las estrategias de modelado directo son reemplazadas por estrategias de conteo más abstractas: *contar todo sin modelos, contar a partir del primer sumando y contar a partir del sumando mayor.* Estas estrategias se diferencian de las de *modelado directo* en que si bien los niños pueden utilizar también objetos físicos, éstos son usados para registrar los pasos efectuados en el conteo, mientras que en las de modelado directo son usados para representar cada uno de los conjuntos y la acción o relaciones descritas en el problema. Finalmente, los niños tienden a reemplazar los procedimientos de conteo por otras estrategias aditivas fundadas en reglas y en la memorización. Las primeras se refieren a procedimientos consistentes en componer y descomponer los números para hallar la suma total. En las memorísticas, el niño recupera el resultado de la memoria sin un conteo aparente. Ahora bien, si bien poseemos una descripción de estrategias infantiles bastante completa, aunque no cerrada o acabada, estamos lejos todavía, no obstante, de conocer tanto los factores que inclinan a los niños a elegir una u otra estrategia determinada, como los pasos que conducen de una estrategia a la siguiente, es decir, la transición entre las estrategias. En esta línea, comienzan a vislumbrarse algunos datos de interés (Baroody, 1987; De Corte y Verschaffel, 1985; Resnick y Neches, 1984; Secada, Fuson y Hall, 1983; Siegler, 1987, 1988; Siegler y Sharager, 1984; Siegler y Shipley, 1987), pero por el momento sigue siendo uno de los retos más importantes que tiene planteada la investigación actual.

Sintetizando, dentro del ámbito de la adquisición y desarrollo de la adición sobresalen dos importantes cuestiones pendientes aún de solución: 1) la transición de la concepción unitaria de la suma a la binaria y 2) la transición entre las estrategias. En este trabajo trataremos de responder a ambas cuestiones, planteando las siguientes hipótesis de trabajo:

1. La transición de la concepción unitaria de la suma a la binaria no se produce súbitamente, sino que constituye un proceso gradual, de modo que incluso ambas concepciones pueden estar presentes simultáneamente, dependiendo al menos de la magnitud de los sumandos. Más concretamente, la resolución correcta de la tarea de sumar con la incógnita en el sumando inicial se obtendría antes en ciertas tareas (1 + N, círculos + guarismo) que en otras (hechos numéricos, hechos numéricos superiores a la decena).
2. Las estrategias utilizadas por los niños serán función de la edad, el lugar de la incógnita y el tipo de tareas propuestas.
3. Finalmente, se observarán diferencias evolutivas en el nivel de rendimiento de los niños a lo largo de las distintas condiciones experimentales (tipo de tareas, lugar de la incógnita), dentro y entre los diferentes grupos.

A fin de comprobar estas hipótesis seguimos un diseño factorial mixto de $3 \times 2 \times 4$ con medidas repetidas en los dos últimos factores, en el que el primer factor es la edad, el segundo el lugar de la incógnita y el tercero el tipo de tareas.

2. METODO

2.1. Sujetos

Pasan las pruebas 72 niños de un colegio madrileño de nivel socioeconómico medio, elegidos al azar. Se forman tres grupos de 24 sujetos cada uno. El I lo constituyen niños de 2.º de Preescolar con edades comprendidas entre los 5-6 años (*M;* 5;6); el grupo II lo componen niños de 1.º de EGB cuyas edades oscilan entre los 6-7 años (*M;* 6;4) y finalmente, el grupo III lo forman niños de 2.º de EGB con un rango de edad entre 7-8 años (*M;* 7;6).

2.2. Material y procedimiento experimental

El material utilizado consistía en unos cuadernillos, que contenían las pruebas y un lápiz para anotar las respuestas.

En cuanto al procedimiento, las pruebas eran administradas individualmente y tenían una duración máxima de quince minutos. Todos los niños pasan las tareas en dos sesiones separadas por un lapso de tiempo de una semana, para evitar que la prueba se alargase excesivamente y mantener un alto grado de motivación hacia la tarea, dada su similitud con los contenidos escolares. En la primera fase, la mitad de los niños de cada grupo resolvían las operaciones de sumar con la incógnita en el resultado, mientras que la otra mitad lo hicieron con la incógnita en un sumando. La segunda fase fue idéntica a la primera, pero invirtiendo el orden anterior.

El experimentador leía en voz alta la tarea propuesta al niño para comprobar que la había entendido perfectamente y evitar la dificultad que en ocasiones presentan los niños más jóvenes a la hora de identificar las cantidades escritas. Las pruebas consistían en una serie de operaciones de sumar, de modo que el 50% tenían la incógnita en el resultado y el resto en el sumando inicial. En concreto se presentaron cuatro tipos de operaciones: 1+N, círculos + guarismo, hechos numéricos y hechos numéricos superiores a la decena. En todas las tareas el sumando mayor se situaba en el segundo sumando, a fin de diferenciar la concepción unitaria de la binaria, ya que esta última parece vincularse con el conocimiento de la propiedad conmutativa. En la Tabla 1 se recogen las cantidades específicas utilizadas.

Tabla 1

Cantidades específicas utilizadas en las distintas áreas

1 + N	CIRCULOS + GUARISMOS	HECHOS NUMERICOS	HECHOS NUMERICOS SUPERIORES A LA DECENA
1 + 13	0000000 + 12	3 + 5	5 + 12
1 + 8	000 + 7	2 + 3	6 + 9
1 + 15	00000 + 17	4 + 6	7 + 13

Finalmente, se presentan tres ensayos para cada tipo de operación, contrabalanceándose el orden de aparición de los mismos. Todo el proceso de ejecución de las tareas era registrado en vídeo.

3. ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

El análisis de varianza mixto 3 (Grupo: G. I vs G. II vs G. III) × 2 (Lugar de la incógnita: sumando inicial vs resultado) × 4 (Tareas: 1 + N vs Círculos + Guarismo vs Hechos Numéricos vs Hechos Numéricos superiores a la decena) con medidas repetidas en los dos últimos factores y llevado a cabo mediante el programa BMDP (2V), muestra, por un lado, que son significativos los efectos principales de los factores grupo ($F_{2,69} = 24{,}72$, $p < 0{,}01$), lugar de la incógnita ($F_{1,69} = 50{,}54$, $p < 0{,}01$) y tipo de tareas ($F_{3,207} = 35{,}48$, $p < 0{,}01$) (ver Tabla 2). La prueba de Newman-Keuls refleja, no obstante, diferencias significativas únicamente entre el grupo de los más pequeños y el de los mayores ($p < ,05$), mientras que no es significativa la diferencia entre el grupo de 2.º de Preescolar y 1.º de EGB, así como entre los grupos de 1.º y 2.º de EGB. Sin embargo, el rendimiento de los niños de 2.º de EGB es superior en general al del grupo de 1.º de EGB y éste a su vez es superior al de Preescolar.

Tabla 2
Resultados del ANOVA

F_G	$F_{2,69} = 24{,}72$	$p < ,01$
F_R	$F_{1,69} = 50{,}54$	$p < ,01$
F_{RG}	$F_{2,69} = 1{,}30$	N. S.
F_T	$F_{3,207} = 35{,}48$	$p < ,01$
F_{TG}	$F_{6,207} = 4{,}34$	$p < ,01$
F_{RG}	$F_{3,207} = 8{,}51$	$p < ,01$
F_{RTG}	$F_{6,207} = 6{,}61$	$p < ,01$

Con respecto al segundo factor, en todos los grupos se obtienen niveles superiores de éxito cuando la incógnita se halla en el resultado que cuando lo hace en el sumando inicial, aunque estas diferencias disminuyen a medida que ascendemos en el nivel de escolaridad de los niños. Finalmente, la prueba de Newman-Keuls muestra la existencia de diferencias significativas entre las tareas círculo + guarismo y hechos numéricos superiores a la decena ($p < ,05$) círculos + guarismo y $1 + N$ ($p < ,05$), círculos + guarismo y hechos numéricos ($p < ,01$), hechos numéricos superiores a la decena y $1 + N$ ($p < ,05$), hechos numéricos superiores a la decena y hechos numéricos ($p < ,05$) y finalmente, $1 + N$ y hechos numéricos ($p < ,01$).

Por otro lado, también resultan significativas las siguientes interacciones: grupo $\times$ lugar de la incógnita ($F_{2,69} = 1{,}30$, $p < 0{,}05$), grupo $\times$ tipo de tareas ($F_{6,207} = 4{,}34$, $p < 0{,}01$), lugar de la incógnita $\times$ tipo de tareas ($F_{3,207} = 8{,}51$, $p < 0{,}01$) y grupo $\times$ lugar de la incógnita $\times$ tipo de tareas ($F_{6,207} = 6{,}61$, $p < 0{,}01$) (ver Tabla 2). En aras de una mayor claridad y para evitar repeticiones innecesarias, analizaremos únicamente la interacción triple mediante los contrastes de interacción con la prueba de Scheffé.

3.1. Análisis de las relaciones entre los factores grupo, lugar de la incógnita y tipo de tareas

Para pormenorizar la eficiencia de los diferentes factores hemos llevadó a cabo tres contrastes de interacción. El primero, entre los distintos niveles de los factores grupo y tipo de tareas con la incógnita en el resultado. El segundo es similar al anterior, pero con la incógnita en el sumando inicial. Estos contrastes no sólo nos permitirán determinar entre qué grupos y entre qué tareas existen diferencias, sino también si esas diferencias son las mismas cuando la incógnita se sitúa en el resultado o en el sumando inicial. El tercer contraste se efectúa entre los distintos niveles de los factores grupo y lugar de la incógnita en cada una de las tareas. En este caso se pretende averiguar en qué medida las diferencias entre los grupos se ven afectadas por el lugar de la incógnita y específicamente, en qué tareas se presentan dichas diferencias.

Los datos indican, en relación con el primer tipo de contraste, que existen diferencias significativas entre los grupos de Preescolar y 1.º de EGB en las tareas 1 + N – hechos numéricos ($F_{1,207} = 26{,}04$, $p < 0{,}01$), círculos + guarismo - hechos numéricos ($F_{1,207} = 19{,}44$, $p < 0{,}01$) y círculos + guarismo – hechos numéricos superiores a la decena ($F_{1,207} = 4{,}33$, $p < 0{,}05$). Igualmente, las diferencias son significativas entre los grupos de Preescolar y 2.º de EGB en las tareas 1 +N – hechos numéricos ($F_{1,207} = 20{,}91$, $p < 0{,}01$) y círculos + guarismo – hechos numéricos ($F_{1,207} = 19{,}44$, $p < 0{,}01$). Como se puede observar en la Tabla 3, las diferencias entre los grupos de Preescolar y 1.º de EGB son debidas principalmente a la influencia del grupo de Preescolar. Así, las puntuaciones se alejan para este grupo en los sumandos 1 + N – hechos numéricos y círculos + guarismos – hechos numéricos, siendo superiores en todos los casos su rendimiento en hechos numéricos. Sin embargo, en el contraste círculos + guarismo – hechos numéricos superiores a la decena, es el grupo de EGB el que muestra un comportamiento más diferenciado, dando lugar a la significación del mismo. Algo similar acontece respecto a los grupos de Preescolar y 2.º de EGB, ya que las diferencias encontradas se deben al comportamiento del grupo de Preescolar, que registra puntuaciones superiores en hechos numéricos. No obstante, hay que señalar a la vista de esta tabla que las puntuaciones más altas alcanzadas por todos los grupo se sitúan en los sumandos 1 + N y hechos numéricos, aunque en 2.º de Preescolar son claramente más elevadas en hechos numéricos y de ahí las diferencias a las que acabamos de hacer mención.

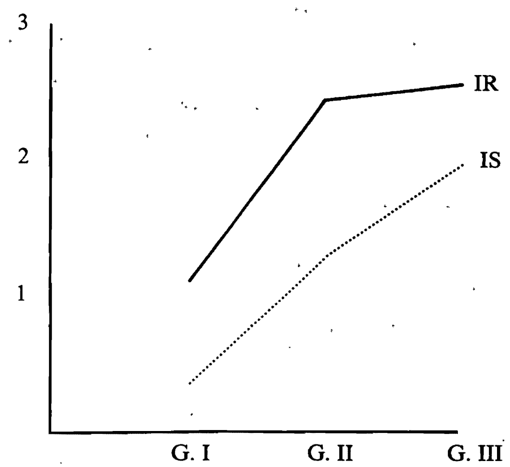
Tabla 3
Medias y sumatorios correspondientes a la interacción G (Grupo) × T (Tarea) × IR/IS (Lugar de la incógnita)

		IRT1	IRT2	IRT3	IRT4	IST1	IST2	IST3	IST4
G. I	$\bar{X}$	1,13	,63	2,29	,54	,33	,17	,46	,38
	Σ	27	15	55	13	8	4	11	9
G. II	$\bar{X}$	2,67	2	2,58	2,42	1,5	1,13	1,46	1,17
	Σ	63	48	62	58	36	27	35	28
G. III	$\bar{X}$	2,92	2,38	2,96	2,33	2,38	1,42	2,17	2,08
	Σ	70	57	71	56	57	34	52	50

Los contrastes de interacción cuando la incógnita se ubica en el sumando inicial muestran diferencias significativas entre los grupos de Preescolar y 2.º de EGB, así como entre 1.º de EGB y 2.º de EGB para las tareas 1 +N − círculos + guarismo ($F_{1,207} = 10,67$, $p < 0,01$ y $F_{1,207} = 5,8$, $p < 0,05$, respectivamente) y entre estos dos últimos grupos en las tareas círculos + guarismo − hechos numéricos superiores a la decena ($F_{1,207} = 6,41$, $p < 0,05$). En este caso las diferencias entre los grupos son imputables en todos los casos al grupo de los mayores (ver Tabla 3). Asimismo, al igual que en la condición en la que la incógnita se encuentra en el resultado, los niños de EGB, principalmente, obtienen un nivel de rendimiento superior en los sumandos 1 + N y hechos numéricos.

A partir de estos datos se pueden extraer al menos dos conclusiones. En primer lugar, las diferencias entre los grupos dependen del lugar en que se ubique la incógnita, de modo que, cuando ésta se halla en el resultado, encontramos diferencias entre el grupo de Preescolar y cada uno de los grupos de EGB. En cambio, cuando la incógnita se sitúa en el sumando inicial la significatividad afecta además a la diferencia entre los dos grupos de EGB. Estos datos sugieren una evolución en la adquisición del concepto de suma, de modo que los niños de 2.º de Preescolar muestran cierta competencia, cuando la incógnita se sitúa en el resultado, principalmente en las tareas 1 + N y hechos numéricos; mientras que esta competencia es mínima cuando la incógnita se encuentra en el sumando inicial (ver Figura 1). Por su parte, los niños de 1.º de EGB se hallan en una etapa intermedia, ya que alcanzan un nivel de éxito semejante al de los niños de 2.º de EGB cuando la incógnita se sitúa en el resultado (no hallamos diferencias significativas entre estos grupos en ninguna de las comparaciones entre las tareas), pero las diferencias entre ellos son significativas cuando la incógnita se encuentra en el sumando inicial. La razón de esta discrepancia se halla en que el comportamiento de los niños de 1.º es similar globalmente al rendimiento de los preescolares en las tareas con la incógnita en el resultado. Finalmente, el grupo de 2.º de EGB presenta, en comparación con los otros dos grupos, el nivel de éxito más elevado en ambas condiciones experimentales y, además, las diferencias entre ellas son poco notorias. Sin embargo, al igual que en los demás grupos, cuando la incógnita se ubica en el sumando inicial el éxito es mayor en las tareas 1 + N y hechos numéricos. En relación con la hipótesis 2, parece que las tareas 1 + N y hechos numéricos resultan ser las más sencillas para los niños de todos los grupos, de modo que el paso de un nivel de competencia a otro se efectuaría antes en estas tareas. En otras palabras, la transición de la concepción unitaria de la suma, más vinculada a la resolución de las tareas con la incógnita en el resultado, a la concepción binaria se produciría primeramente de acuerdo con nuestros datos, en las tareas 1 + N y hechos numéricos. Además, la transición de una concepción a otra se produce de modo gradual, dependiendo de la magnitud de los sumandos y pudiendo coexistir las dos al mismo tiempo en un momento dado (en el grupo de 1.º de EGB). El hecho de que esta transición no se efectúe antes en la tarea círculos + guarismo, tal como se propone en la hipótesis 1, puede ser debido a que los círculos aparecen siempre en el sumando inicial, de modo que el niño tendría que aplicar la propiedad conmutativa de la suma para que resultase más fácil hallar el resultado, mientras que en el caso de hechos numéricos puede suplir esta carencia representando las cantidades con los dedos, independientemente de la ubicación del sumando mayor.

Figura 1
Representación de la interacción grupo por lugar de la incógnita



La segunda conclusión que puede ser extraída de estos datos es que las diferencias entre los grupos y entre las tareas varían en función del lugar de la incógnita. Este último dato es asimismo complementado mediante los contrastes de interacción entre los distintos niveles del factor grupo y lugar de la incógnita para cada una de las tareas. Las diferencias son significativas entre los grupos de Preescolar y 1.º de EGB en las tareas hechos numéricos ($F_{1,207} = 8{,}4$, $p < 0{,}01$) y hechos numéricos superiores a la decena ($F_{1,207} = 16{,}8$, $p < 0{,}01$). Igualmente son significativas las diferencias entre los grupos de Preescolar y 2.º de EGB en las tareas hechos numéricos ($F_{1,207} = 18{,}03$, $p < 0{,}01$) y círculos + guarismo ($F_{1,207} = 4{,}17$, $p < 0{,}5$); así como entre los grupos de EGB en las tareas 1 + N ($F_{1,207} = 6{,}615$, $p < 0{,}5$) y hechos numéricos posteriores a la decena ($F_{1,207} = 16{,}67$, $p < 0{,}01$). Estos datos vienen a confirmar los resultados anteriores, ya que en la tarea hechos numéricos se produce un decremento muy acusado en el nivel de rendimiento de los niños de Preescolar cuando la incógnita se sitúa en el sumando inicial, mientras que no ocurre lo mismo en 1.º de EGB y sobre todo en 2.º de EGB, siendo las diferencias significativas. Con respecto a la tarea 1 + N, las puntuaciones del grupo de los pequeños manifiestan un descenso notorio cuando la incógnita se ubica en el sumando inicial, siendo claro este decremento en 1.º de EGB (aún cuando en este grupo resulte ser la puntuación máxima en esta condición). Ello conduce a que las diferencias entre los dos grupos de EGB sean significativas.

En síntesis, se puede afirmar, de acuerdo con la hipótesis 3, que existen diferencias evolutivas entre los grupos respecto al nivel de rendimiento de los niños a lo largo de las distintas condiciones experimentales (ver Figura 1). No obstante, aún cuando el mayor nivel de éxito en todos los grupos se produce cuando la incógnita se halla en el resultado, a medida que ascendemos en el nivel de escolaridad aumenta el nivel de éxito de los niños en la tarea de sumar con la incógnita en el sumando inicial, vinculada con la concepción binaria de la suma (Weaver, 1982). Además, los datos de este estudio indican que la resolución correcta de la tarea de sumar, tanto cuando la incógnita se ubica en el resultado como cuando lo hace en el sumando inicial, aparece primeramente en las tareas 1 + N y hechos numéricos.

3.2. **Las estrategias de resolución**

3.2.1. *Análisis de las estrategias aditivas cuando la incógnita se sitúa en el resultado*

Carpenter y Moser (1983, 1984) proponen tres categorías de estrategias: modelado directo, conteo y hechos numéricos, que aparecerían en este orden en el desarrollo infantil. Nuestros datos confirman esta evolución, ya que en el grupo de Preescolar las estrategias más habituales son las de modelado directo y conteo. En 1.º de EGB sobresalen sobre todo las estrategias de conteo y en un segundo plano las de hechos numéricos. Finalmente, en 2.º de EGB las estrategias de hechos numéricos alcanzan un porcentaje ligeramente superior a las de conteo (ver Tabla 4). Estas diferencias entre los grupos se manifiestan principalmente en las tareas 1 + N y hechos numéricos, que, como puede observarse los niños de EGB propenden a emplear las estrategias memorísticas. Estas estrategias implican un nivel conceptual más elaborado que las estrategias de conteo, tal como nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1990a y b; Bermejo y Lago, 1988) y otros autores han puesto de manifiesto en múltiples estudios (Baroody, 1987; De Corte y Verschaffel, 1987; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter y Fennema, en prensa). Por su parte, los preescolares se hallarían en un nivel evolutivo inferior, pues, si bien en la tarea 1 + N cuentan frecuentemente a partir del mayor, en hechos numéricos prefieren la estrategia de contar todo, dada la gran facilidad para representar estos sumandos con los dedos. Por último, en las tareas hechos numéricos superiores a la decena y círculos + guarismo no aparecen diferencias entre los grupos, ya que es mayoritario el uso de la estrategia de contar a partir del mayor. Esta estrategia de contar a partir del mayor, como ya indicamos en otra parte (Rodríguez, en prensa), se vincula con un cierto conocimiento de la conmutatividad.

En líneas generales, los datos de este estudio confirman en parte los resultados del estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1984). Nuestros datos muestran igualmente que en un principio los niños no abandonan las estrategias más sencillas aún cuando ya disponen de otras más sofisticadas. En efecto, aunque los niños de Preescolar utilizan preferentemente la estrategia de contar a partir del mayor, no por ello relegan el procedimiento de contar todo, que resulta ser el más utilizado en la tarea hechos numéricos. No obstante y en contra de los resultados de Carpenter y Moser (1984), los niños que muestran el procedimiento más evolucionado de contar a partir del mayor, apenas recurren a la estrategia de contar a partir del menor, como lo demuestran los bajos porcentajes obtenidos (10,91% en Preescolar, 8,11% en 1.º de EGB y 4,25% en 2.º de EGB). Por tanto, si bien es cierto que los niños no siempre ponen en marcha la estrategia más evolucionada, también se aprecia que en el caso de las estrategias de conteo, una vez que disponen del procedimiento de contar a partir del mayor, la tendencia consiste en usar este último preferentemente frente a las estrategias de contar todo sin modelos y contar a partir del menor.

Tabla 4
Estrategias utilizadas en las tareas aditivas con la incógnita en el resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G. I				G. II				G. III			
TAREAS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Contar todo con modelos	22,22	26,66	50,9	30,78	3,14	26,08	14,51	8,61	0	12,27	1,41	5,36
		(32,64)*				(13,08)				(4,76)		
Contar todo mentalmente	7,41	0	9,09	0	0	2,17	4,83	0	0	0	0	0
		(41,25)				(1,75)				(0)		
Contar a partir del menor	11,11	6,67	18,18	7,69	1,59	10,86	9,67	10,34	2,86	1,75	7,04	5,35
		(10,91)				(8,11)				(4,25)		
Contar a partir del mayor	48,15	60	16,35	61,53	41,31	43,47	30,64	60,34	32,85	49,12	30,98	57,14
		(46,51)				(43,94)				(42,52)		
Memorísticas	11,11	6,67	5,45	0	53,96	15,22	40,32	8,62	62,86	15,79	60,56	16,07
		(5,81)				(29,53)				(38,82)		
Reglas	0	0	0	0	0	2,17	0	12,07	1,43	21,05	0	16,07
		(0)				(3,56)				(9,64)		

* Los valores entre paréntesis representan el porcentaje medio de ensayos en cada grupo en cada una de las estrategias.

3.2.1.1. *Niveles evolutivos de las estrategias de contar todo con modelos y de conteo*

Aunque nuestros datos confirman, en general, el modelo evolutivo de estrategias propuesto por Carpenter y Moser (1984), no obstante, encontramos otros niveles, que podrían ser los responsables del paso de las estrategias más sencillas a otras más complejas. Brevemente, Carpenter y Moser establecen cinco niveles evolutivos: en el primero, los niños son incapaces de resolver cualquier problema de suma o resta; en el segundo, utilizan la estrategia de modelado directo; el tercero es un período de transición en el que aparecen tanto estrategias de modelado directo como de conteo; en el cuarto se limitan a las de conteo y en el quinto, recurren además a las memorísticas y las reglas. En el presente estudio y a un nivel más detallado de análisis, encontramos varias formas de ejecutar las estrategias de modelado directo y conteo (ver también Baroody, 1987). Específicamente, en la estrategia de contar todo por modelado directo observamos cuatro modos diferentes de ejecutarla, que implican, desde nuestro punto de vista, grados distintos de complejidad y que agrupamos en cuatro niveles evolutivos. El nivel 1.º (N_1A) consiste en contar todo representando inicialmente los dos sumandos con los dedos, y volviendo a contar todo conjuntamente. Este procedimiento supone un doble conteo, ya que el niño cuenta primeramente para representar los sumandos con los dedos y vuelve a contar de nuevo para hallar la suma total. El 2.º nivel (N_2A), implica un grado más de desarrollo, puesto que los niños representan inmediatamente los dos sumandos con los dedos sin necesidad de contar uno por uno, contando todo seguidamente. En otras palabras, al igual que en el nivel anterior, esta estrategia requiere representar las dos cantidades para hallar el total, pero a diferencia de ésta no hay doble conteo. En el nivel 3.º (N_3A) cuentan todo a medida que representan los sumando con los dedos. Como en los niveles anteriores, representan los sumandos con los dedos, pero a diferencia de éstos la representación no es previa. Finalmente, el 4.º (N_4A) nivel consiste en efectuar un barrido mental en uno de los sumandos, añadiendo posteriormente el otro con los dedos. Por ejemplo, en el algoritmo 3 + 5 el niño cuenta de 1 a 3 sin necesidad de ningún tipo de registro con los dedos y añade 5 con los dedos. Además, todos estos niveles incluyen dos subniveles: contar todo empezando por el menor y contar todo empezando por el mayor. En la Tabla 5, se recogen los porcentajes de ensayos correspondientes a cada nivel.

Tabla 5
Porcentajes de ensayos correspondientes a los distintos niveles de la estrategia de contar todo con modelos

		G. I	G. II	G. III
NIVEL	Ia*	0	0,43	0
	Ib	17,72	6,81	1,75
NIVEL	IIa	3,625	0	0
	IIb	0,91	0	0
NIVEL	IIIa	1,36	3,365	1,69
	IIIb	3,23	1,19	0
NIVEL	IVa	5,77	0	0
	IVb	0	1,29	1,31

* La letra «a» que acompaña a los distintos niveles significa que el niño empieza a contar por el menor, mientras que la «b» significa que lo hace por el mayor.

En las estrategias de conteo identificamos igualmente distintos modos de utilizarlas. Así, en la estrategia de contar todo sin modelos hallamos dos niveles: contar todo mentalmente empezando por el menor (N_1B) y contar todo mentalmente empezando todo por el mayor (N_2B). A su vez encontramos subniveles diferentes según que el niño represente o no el sumando que no va a contar, o el que si va a contar. En efecto, en la estrategia de contar a partir del menor, distinguimos cuatro niveles: en el nivel 1.º (N_1C) se representan con los dedos simultáneamente ambos sumandos, contando únicamente el mayor. En el nivel 2.º (N_2C), el niño representa el sumando menor con los dedos simultáneamente y sin contarlo añaden el mayor con los dedos. En el nivel 3.º (N_3C), representa sólo el sumando mayor con los dedos a medida que cuenta. Finalmente, en el nivel 4.º (N_4C) se añade el sumando mayor contando mentalmente. Igualmente, encontramos tres niveles en la estrategia de contar a partir del mayor: en el nivel 1.º (N_1E) el niño representa simultáneamente con los dedos el sumando mayor y añaden el menor a medida que cuentan. El 2.º (N_2E) consiste en añadir el sumando menor con los dedos a medida que cuentan. Finalmente, en el nivel 3.º (N_3E) el niño cuenta el sumando menor mentalmente. En la Tabla 6, se recogen los porcentajes de ensayos correspondientes a los distintos niveles de las estrategias de conteo.

Tabla 6
Porcentaje de ensayos correspondientes a los distintos niveles de las estrategias de conteo

		G. I	G. II	G. III
ESTRATEGIAS	NIVELES			
Contar a partir del menor	I	5,8	0,43	0
	II	3,2	0	0
	III	1,92	7,28	2,57
	IV	0	0,4	1,68
Contar a partir del mayor	I	1,36	0	0
	II	21,74	26,73	24,12
	III	23,4	17,205	18,4

En relación con los niveles establecidos, conviene señalar que la serie presentada no pretende ser exhaustiva, sino que probablemente existen otros. Así por ejemplo, en la estrategia de contar a partir del mayor puede haber un nivel en el que los niños representen con los dedos simultáneamente ambos sumandos, contando únicamente el menor.

En cuanto al proceso de transición entre estrategias, en la Tabla 7 se proponen algunas rutas evolutivas, que requieren no obstante para su confirmación estudios longitudinales. Además, podrían existir rutas distintas a la hora de pasar de unos niveles a otros y de unas estrategias a otras.

Tabla 7
Ejemplos de los tipos de transición que se producen en la evolución de las estrategias

$N_1A_1 + N_1B + N_1C + N_1E$
$N_1A_2 + N_2B + N_2C + N_1E$
$N_2A_1 + N_1C + N_1E$
$N_2A_1 + N_2C + N_1E$
$N_2A_2 + N_1E$
$N_3A_1 + N_3C + N_2E$
$N_4A_1 + N_1C + N_1E$
$N_4A_1 + N_2C + N_1E$
$N_4A_2 + N_1E$
$N_1B + N_4C + N_3E$
$N_2B + N_4C + N_3E$

3.2.2. *Análisis de las estrategias aditivas con la incógnita en el sumando inicial*

La resolución de esta tarea puede efectuarse mediante adición o substracción. En el presente estudio, la mayor parte de los niños la han resuelto aditivamente, ya que en el 70,92% de los ensayos del grupo de Preescolar, en el 60,94% de 1.º de EGB y en el 53,12% en 2.º de EGB (ver Tabla 8) han utilizado la estrategia de contar desde el sumando conocido hasta el resultado. Sin embargo, tan sólo en el 10,61% de los ensayos de Preescolar, en el 0,89% de los de 1.º de EGB y en el 2,23% de los de 2.º de EGB, usan la estrategia de contar hacia atrás relacionada con la resta. La utilización de estas estrategias requiere una competencia conceptual importante, ya que implica conocer perfectamente las funciones de cada uno de los términos de la adición (el esquema parta-parte-todo, en palabras de Resnick, 1983) y un sistema de doble registro. Así, por ejemplo, en el problema __ + 5 = 8, cuando el niño cuenta hacia atrás no sólo tiene que invertir la secuencia de numerales, sino que también ha de registrar los pasos de conteo que hay desde el 8 hasta el 5. En el procedimiento de contar desde el sumando conocido, tiene que comprender que su conteo finaliza en el 8 y registrar el número de pasos que hay entre el 5 y el 8. En este estudio hemos hallado dos modos de llevar a cabo este registro: mentalmente y con los dedos. La mayoría de los niños, en todos los grupos de edad, emplean habitualmente los dedos en la estrategia de contar desde el sumando conocido, mientras que en la de contar hacia atrás lo hacen mentalmente (ver Tabla 8). Igualmente, podemos resaltar que las estrategias de hechos numéricos son escasas en Preescolar y 1.º de EGB, mientras que las memorísticas cobran especial importancia en 2.º de EGB (39,38% de los ensayos).

Tabla 8

Estrategias utilizadas en las tareas aditivas con la incógnita en el sumando inicial. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G. I				G. II				G. III			
TAREAS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Contar a partir de una cantidad dada con los dedos	0	75	18,18	33,33	0	66,67	34,28	60,76	0	61,76	30,77	48
		(31,63)*				(40,41)				(35,13)		
Contar a partir de una cantidad dada mentalmente	62,5	25	36,36	33,33	8,33	25,92	22,86	25	5,26	23,53	21,15	22
		(39,3)				(20,53)				(17,98)		
Contar hacia atrás con los dedos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,92	0 00	6
		(0)				(0)				(2,23)		
Contar hacia atrás mentalmente	0	0	9,1	33,33	0	0	0	3,57	0	0	0	0
		(10,61)				(0,89)				(0)		
Memorísticas	37,5	0	0	0	91,67	3,7	42,86	0	89,47	11,76	42,31	14
		(9,37)				(34,56)				(39,38)		
Reglas	0	0	27,26	0	0	3,7	0	7,14	5,26	0	5,77	10
		(6,81)				(2,71)				(6,76)		
Estimación	0	0	9,1	0	0	0	0	3,57	0	0	0	0
		(2,27)				(0,89)				(0)		

* Los valores entre paréntesis representan el porcentaje medio de ensayos en cada estrategia y para cada grupo.

Por último, la magnitud de los sumandos influye principalmente en las estrategias de los niños de EGB. En estos grupos —al igual que en la condición con la incógnita en el resultado— en las tareas 1 + N y hechos numéricos los niños tienden a poner en marcha procedimientos más complejos, como los memorísticos. En cambio, los preescolares tienden a usar mayoritariamente la estrategia de contar a partir de un número dado en todas las tareas. Por tanto, las diferencias entre los tres grupos en relación con las estrategias se producen principalmente entre los grupos de 2.° de Preescolar y EGB en las tareas 1 + N y hechos numéricos, mientras que entre los grupos de EGB las diferencias apenas son perceptibles (ver Tabla 8).

3.3. **Análisis de los errores**

Siguiendo de cerca el modelo de conteo de Greeno, Riley y Gelman (1984), analizaremos los errores cometidos por los niños con respecto a los tres tipos de competencia propuestos: la competencia conceptual, la competencia de procedimiento y la competencia de utilización. Los errores de competencia conceptual se producen ante la carencia de un esquema suficientemente elaborado de la adición, de modo que los niños poseen un conocimiento incompleto de los principios y reglas subyacentes a la operación de sumar. Así se incluyen dentro de esta categoría errores consistentes en inventar la respuesta, repetir una de las cantidades ya dadas, etc. Los errores de competencia de procedimiento conllevan una adecuada competencia conceptual, pero las estrategias elegidas no son las más adecuadas para llevar a un buen término la tarea, como por ejemplo, intentar representar los dos sumandos con los dedos cuando no se posee el número suficiente de dedos. Por último, los errores relativos a la competencia de utilización implican competencia conceptual y de procedimiento por parte del niño, pero fallan en la puesta en marcha del procedimiento seleccionado, por ejemplo, contar mal.

Teniendo en cuenta esta categorización de los errores podemos observar que en las tareas con la incógnita en el resultado son frecuentes los errores conceptuales entre los niños de Preescolar y 1.° de EGB (ver Tabla 9), consistiendo fundamentalmente en la repetición de una de las cantidades. Sin embargo, los niños mayores únicamente cometen un error de este tipo en la tarea círculos + guarismo. Los errores de procedimiento aparecen sólamente en el grupo de los más pequeños, mientras que los de utilización se manifiestan en los tres grupos.

En síntesis, estos datos ponen de manifiesto que los niños preescolares se hallan en fase de adquisición del concepto de sumar, ya que la mayoría de los errores son conceptuales. En 1.° de E.G.B., se observa un proceso en parte similar, ya que si bien cometen menos errores que los preescolares, no obstante la mayor parte de ellos tienen su origen en la competecia conceptual. Finalmente, los niños de 2.° de EGB muestran un con-

Tabla 9
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en las tareas aditivas con la incógnita en el resultado

	G. I				G. II				G. III			
TAREAS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
CONCEPTUAL:												
— Inventa	15,55	12,28 (13,29)*	11,76	13,56	33,33	8,33 (15,77)	0	21,43	0	0 (0)	0	0
— Repite la cantidad mayor	35,55	15,79 (19,39)	5,9	20,34	33,33	12,5 (24,31)	30	21,43	0	0 (0)	0	0
— Repite la cantidad menor	15,55	43,86 (25,02)	17,65	22,03	0	0 (0)	0	0	0	40 (10)	0	0
— Añade una unidad al sumando mayor	0	0 (0)	0	0	0	12,5 (15,98)	30	21,43	0	0 (0)	0	0
Total	66,67	71,93 (57,46)	35,3	55,93	66,66	33,33 (56,07)	60	64,29	0	40 (10)	0	0
PROCEDIMIENTO:												
— Represen-tan mal las canti-dades con los dedos	15,55	17,54 (24,49)	41,17	23,73	0	0 (0)	0	0	0	0 (0)	0	0
UTILIZACION:												
— Cuentan mal	17,78	10,52 (18,04)	23,53	20,34	33,33	66,66 (43,92)	0	35,71	100	60 (90)	100	100

* Porcentaje de ensayos medio en cada tipo de estrategia errónea y para cada grupo.
Tareas: 1 = 1 +N; 2 = círculos + guarismos; 3 = hechos numéricos; 4 = hechos numéricos superiores a la decena

cepto más consolidado de la operación aditiva, ya que los errores se relacionan preferentemente con la competencia de utilización.

En cuanto a las pruebas con la incógnita en el sumando inicial, constatamos que los errores más frecuentes en todos los grupos y en todas las tareas son de tipo conceptual (ver Tabla 10), aunque, como señalamos más arriba, estos errores son menos numerosos en 2.º de EGB y, sobre todo, la tasa total de errores es mucho más elevada en Preescolar. Además, los niños preescolares tienden a responder repitiendo el sumando conocido, los de 1.º de EGB presentan un comportamiento semejante aunque también responden diciendo un número cualquiera y, por último, los de 2.º de EGB adicionan el sumando conocido con el resultado. Finalmente, los errores de procedimiento y utilización son menos frecuentes en todos los grupos, aunque proporcionalmente son más importantes en 2.º de EGB (ver Tabla 10). Todo ello muestra que el desarrollo conceptual de los niños con respecto a la adición es función del nivel de escolaridad de los mismos.

Tabla 10

Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en las tareas aditivas con la incógnita en el sumando inicial

	G. I				G. II				G. III			
TAREAS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
CONCEPTUAL:												
– Repite cantidad: el sumando	46,87	35,29	42,62	44,44	41,67	46,67	43,24	40,91	20	15,79	15	13,64
		(42,3)*				(43,12)					(16,11))	
– Repite cantidad: el resultado	17,19	13,23	21,31	22,22	16,67	8,89	16,22	13,63	0	2,63	0	0
		(18,51)				(13,85)				(0,66)		
– Inventa	18,75	29,41	11,47	4,76	27,78	22,22	27,03	22,73	0	5,26	0	0
		(16,09)				(24,94)				(1,31)		
– Adiciona resultado y sumando	4,69	10,29	9,83	4,76	5,55	2,22	2,7	2,27	60	23,68	60	40,91
		(7,39)				(3,18)				(45,92)		
– Añade 5 al sumando	0	0	0	4,76	0	0	0	0	0	0	0	0
		(1,19)				(0)				(0)		

	G. I				G. II				G. III			
TAREAS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
– Dice una cantidad mayor que el resultado en una unidad	0	1,47	1,47	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		(0,73)				(0)				(0)		
Total	87,5	88,23	85,24	85,71	91,66	82,22	89,2	79,54	80	47,37	75	54,54
		(86,67)				(85,65)				(64,22)		
PROCEDIMIENTO:												
– Estimación	9,37	11,76	13,11	14,28	8,33	6,67	8,11	9,1	20	13,16	15	13,64
		(12,13)				(8,05)				(15,45)		
UTILIZACION:												
– Cuentan mal	0	0	0	0	0	8,89	2,7	11,36	0	39,5	10	31,82
		(0)				(5,74)				(20,33)		
– Hallan correctamente el resultado, pero repiten cantidad	3,12	0	1,64	0	0	2,22	0	0	0	0	0	0
		(1,19)				(0,55)				(0)		
Total	3,12	0	1,64	0	0	11,11	2,7	11,36	0	39,5	10	31,82
		(1,19)				(6,29)				(20,33)		

* Porcentaje de ensayos medio en cada tipo de estrategia errónea y para cada grupo.

4. CONCLUSIONES

Los tres factores considerados en este estudio resultan ser determinantes a la hora de evaluar la competencia conceptual de los niños en relación con la suma. La adquisición de la concepción binaria de la adición está influida por el nivel de escolaridad de los niños (experiencia escolar en la resolución de tareas de sumar), el lugar de la incógnita y el tipo de tareas, como se pone de manifiesto no sólo en los porcentajes de ensayos correctos, sino también en el análisis de las estrategias y los errores. Así, los niños preescolares no sólo presentan un porcentaje menor de aciertos, en general, en todas las tareas y especialmente cuando la incógnita se sitúa en el sumando inicial, sino que también utilizan las estrategias menos evolucionadas (contar todo con modelos y conteo) y cometen más errores relativos a la competencia conceptual. Los de 1.º de EGB se hallarían en una etapa de transición, ya que si bien su nivel de ejecución en la condición con la incógnita en el resultado se aproxima al rendimiento de los mayores, no obstante, cuando la incógnita se ubica en el sumando inicial las discrepancias entre ambos grupos se acentúan manifiestamente. Además, emplean también estrategias más evolucionadas (conteo y memorísticas) que los preescolares. Finalmente, los niños mayores muestran un mayor conocimiento conceptual de la suma, que se evidencia en el nivel de éxito alcanzado tanto cuando la incógnita se ubica en el resultado como cuando lo hace en el sumando inicial independientemente de las tareas. Además, este grupo utiliza estrategias más evolucionadas (memorísticas) y aunque persisten los errores de competencia conceptual, proporcionalmente comienzan a ser predominantes o al menos importantes los de procedimiento y utilización.

En cuanto a las estrategias de solución utilizadas por los niños, aparece también una clara evolución ya que los mayores presentan procedimientos más evolucionados (i.e., memorísticos), mientras que los otros dos grupos utilizan estrategias basadas en el conteo, especialmente el grupo de Preescolar. A este respecto y en contra de la opinión de algunos autores (i.e., Cobb, 1985), no se puede considerar sin más que en las estrategias de conteo subyazca una concepción binaria de la suma, ya que, por un lado, algunas de estas estrategias al menos podrían ser utilizadas por niños que tengan una concepción unitaria como binaria y, por otro, en estas estrategias no se establecen relaciones entre dos cantidades específicas de un problema, sino entre una de ellas y las que resultan de la aplicación de adiciones unitarias del procedimiento de conteo. Igualmente encontramos varias formas de ejecutar las estrategias de *contar todo con modelos* y de *conteo,* identificando distintos niveles evolutivos en cada una de ellas. Asimismo, proponemos diferentes rutas evolutivas en el paso de unas a otras.

En relación con los errores presentamos una nueva categorización de los mismos, tomando como referencia el modelo de competencia del conteo de Greeno et al. (1984). En el presente estudio, los errores proceden principalmente de déficits en la competencia conceptual en general en todas las tareas, tanto cuando la incógnita se halla en el resultado como cuando lo está en el sumando inicial. Los errores relativos a la competencia de utilización alcanzan cierta importancia entre los niños mayores, debido a cómputos inadecuados en la resolución de las tareas. Los errores de competencia de procedimiento son frecuentes entre los preescolares cuando la incógnita se ubica en el resultado, pero no cuando se halla en el sumando inicial, ya que en este último caso se relacionan mayoritariamente con la competencia conceptual. Esto indica que los niños preescolares muestran mayor competencia en la suma cuando las tareas adoptan la forma canónica de la adición, es decir, cuando la incógnita está en el resultado. En cambio, en 1.º y 2.º de EGB, los errores de procedimiento aumentan frente a los conceptuales en ambas condiciones experimentales.

BIBLIOGRAFIA

BAROODY, A. J. (1987): The development of counting strategy for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 2,* 141-157.

BAROODY, A. J. y GINSBURG, H. P. (1983): The effects of instruction on children's understanding of the «equal» sign. *The Elementary School Journal, 84,* 199-212.

BAROODY, A. J. y GANNON, K. E. (1984): The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction, 1,* 321-339.

BAROODY, A. J. y GINSBURG, H. P. (1986): The relationships between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

BERMEJO, V. (1990): *El niño y la aritmética.* Barcelona: Paidós.

BERMEJO, V. y LAGO, M. O. (1987): El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. *Psicólogos. Papeles del Colegio, 6,* 35-47.

BERMEJO, V. y LAGO, M. O. (1988): Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje, 44,* 109-121.

BERMEJO, V. y RODRÍGUEZ, P. (1986 Junio): *El esquema parte-todo en la conservación y adición.* II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación. Madrid.

BERMEJO, V. y RODRÍGUEZ, P. (1987): Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40,* 71-81.

BERMEJO, V. y RODRÍGUEZ, P. (1990a): Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas, 8,* 23-41.

BERMEJO, V. y RODRÍGUEZ, P. (1990b): La operación de sumar. En Bermejo, V., *El niño y la aritmética.* Paidós, pp. 107-140.

BRIARS, D. J. y LARKIN, J. H. (1984): An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1,* 245-296.

CARPENTER, T. P. (1986): Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1982): The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* (pp. 9-24). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1983): The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and processes* (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M. (1984): The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 179-202.

CARPENTER, T. P. y FENNEMA, E. (en prensa): *Cognitively Guided Instruction Readings.* Manuscrito enviado por los autores.

CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. y MOSER, J. M. (1983): The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 55-72.

COBB, P. (1985): Mathematical actions, mathematical objects, and mathematical symbols. *Journal of Mathematical Behavior, 4,* 127-134.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1985): Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 4,* 3-21.

DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1987): The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 363-381.

FUSON, K. (1988): *Children's counting and concepts of number.* Nueva York: Springer-Verlag.

GREENO, J. G., RILEY, M. S. y GELMAN, R. (1984): Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology, 16,* 94-143.

GROEN, G. y PARKMAN, J. (1972): A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79,* 329-343.

GROEN, G. y RESNICK, L. B. (1977): Can preschool children invent addition algorithms?. *Journal of Educational Psychology, 69,* 645-652.

HIEBERT, J. (1982): The position of unknow set in children's solutions of verbal arithmetic problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 341-349.

LINDVALL, C. M. e IBARRA, C. G. (1980): Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 11,* 50-62.

RESNICK, L. B. (1983): A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). Nueva York: Academic Press.

RESNICK, L. G. y FORD, W. W. (1981): *The psychology of mathematics for instruction.* Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

RESNICK, L. G. y NECHES, R. (1984): Factors affecting individual differences in learning ability. En R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (pp. 275-323). Hillsdale, Nueva Jersey: LEA.

RILEY, M. S., GREENO, J. G. y HELLER, J. I. (1983): Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Nueva York: Academic Press.

RODRÍGUEZ, P. (en prensa): *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa.* Madrid: Universidad Complutense.

SECADA, W. G., FUSON, K. y HALL, J. W. (1983): The transition form counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 14,* 47-57.

SIEGLER, R. S. (1987): Strategy choices in subtraction. En J. A. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 81-106). Nueva York: Oxford University Press.

SIEGLER, R. S. (1988): Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students and perfectionists. *Child Development, 59,* 833-851.

SIEGLER, R. S. y SHRAGER, J. (1984): Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? En C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

SIEGLER, R. S. y SHIPLEY, C. (1987): The role of learning in children's strategy choices. En L. S. Liben (Ed.), *Development and learning: Conflict or congruence?* (pp. 71-108). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

STEFFE, L. P., VON GLASERSFELD, E., RICHARDS, J. y COBB, P. (1983): *Children's counting types: Philosophy, theory, and application.* Nueva York: Praeger Publishers.

WEAVER, J. F. (1982): Interpretations of number operations and symbolic representations of addition and subtraction. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 60-66). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.